Grundrechenarten

Wolfgang Kippels

19. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Begriffe

Unter den vier *Grundrechenarten* versteht man diese Rechenarten:

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division

2.1 Addition

Ein Beispiel:

$$3 + 5 = 8$$

Hier werden die Zahlen 3 und 5 addiert, das Ergebnis ist 8.
Man nennt sowohl das Ergebnis als auch die Rechnung ***Summe***.
Die Zahlen, die miteinander addiert werden (hier die Zahlen 3 und 5) nennt man ***Summanden***.

2.2 Subtraktion

Auch hier ein Beispiel:

$$8 - 3 = 5$$

Von der Zahl 8 wird die Zahl 3 subtrahiert. Das Ergebnis ist 5.
Man nennt sowohl das Ergebnis als auch die Rechnung ***Differenz***.
Die Zahl, von der etwas subtrahiert wird (hier die Zahl 8), heißt ***Minuend***, die Zahl, die subtrahiert wird (hier die 3), nennt man ***Subtrahend***.

2.3 Multiplikation

Ein Beispiel:

$$3 \cdot 5 = 15$$

Die Zahl 3 wird mit der Zahl 5 multipliziert, das Ergebnis ist 15.

Die beiden Zahlen, die miteinander multipliziert werden, heißen ***Faktoren***, man nennt sowohl das Ergebnis als auch die Rechnung ***Produkt***.

2.4 Division

Hier sind zwei verschiedene Schreibweisen möglich. Ein Beispiel:

$$\frac{15}{3} = 15 : 3 = 5$$

Die Zahl 15 wird durch die Zahl 3 dividiert, das Ergebnis ist 5.

3 Regeln und Gesetze

3.1 Kommutativgesetze

Auf Deutsch werden die Kommutativgesetze auch **Vertauschungsgesetze** genannt. Sie gelten für **Addition** und **Multiplikation**.

$$\boxed{a + b = b + a}$$
$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

Wie man sieht, kann man die Summanden beim Addieren – bzw. die Faktoren beim Multiplizieren – einfach vertauschen. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Daher werden hier eigentlich nie Fehler gemacht.

Achtung! Kommt die Subtraktion ins Spiel, dann sieht die Sache schon ganz anders aus. So ohne weiteres darf da nicht getauscht werden:

$$a - b \neq b - a$$

Man muss die **Subtraktion** auffassen als **Addition von negativen Zahlen**. Damit sieht die Sache so aus:

$$a - b = a + (-b) = (-b) + a = -b + a$$

Beim Vertauschen muss also das Vorzeichen mitgenommen werden, nur so kann auch bei einer Subtraktion das Vertauschungsgesetz angewendet werden.

Beispiele:

$$2 + 6 + 8 = 2 + 8 + 6 = 10 + 6 = 16$$
$$2 - 6 + 8 = 2 + 8 - 6 = 10 - 6 = 4$$
$$-7 + 10 = 10 - 7 = 3$$
$$2 \cdot 7 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$$

3.2 Assoziativgesetze

Hierbei kommt jeweils nur **eine einzige Rechnenart** zum Einsatz, also **Addition** oder **Multiplikation**. (Hierbei wird ggf. Subtraktion als Addition einer negativen Zahl angesehen.)

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c}$$
$$\boxed{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c}$$

Die Assoziativgesetze besagen nichts anderes, als die Tatsache, dass man sowohl beim Addieren als auch beim Multiplizieren in beliebiger Reihenfolge vorgehen kann. Auch hier passieren eigentlich nie Fehler, so lange keine Minuszeichen auftauchen.

Ähnlich, wie beim Kommutativgesetz muss man auch hier eine Subtraktion als Addition mit negativen Zahlen behandeln. So geht es jedenfalls nicht:

$$(a-b)+c\neq a-(b+c)$$

Man muss das Minuszeichen „fest an die Zahl binden“. Das sieht dann so aus:

$$(a-b)+c=\Big(a+(-b)\Big)+c=a+\Big((-b)+c\Big)=a+(-b+c)$$

Beispiele:

$$4+6+12-2=(4+6)+(12-2)=10+10=20$$
$$23-31+32+17=23+17-31+32=(23+17)+(-31+32)=40+1=41$$
$$3x+5y-x+2y=3x-x+5y+2y=2x+7y$$
$$5u-2w+4v-3w+2v-5u=5u-5u+4v+2v-2w-3w=0u+6v-5w=6v-5w$$

3.3 Distributivgesetz

Hier werden – im Gegensatz zu den Kommutativ- und Assoziativ-Gesetzen – **verschiedene Rechenoperationen** (das **Addieren** und das **Multiplizieren**) auf eine bestimmte Weise miteinander verknüpft.

$$\boxed{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$$
$$\boxed{(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c}$$

Für viele Menschen ist das Gesetz besser in Worten zu merken:

Eine Zahl wird mit einer Summe multipliziert,

indem man die Zahl mit jedem Summanden multipliziert.

Ein Minuszeichen anstelle des Pluszeichens ist beim Distributivgesetz kein Problem. Damit funktioniert das Distributivgesetz auch:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Wenn man das Distributivgesetz „rückwärts“ anwendet, dann spricht man auch vom *Ausklammern*. Ist eine Zahl oder ein Term in jedem Summanden als Faktor enthalten, dann kann man ihn aus der Summe „ausklammern“, indem man diese Zahl / diesen Term aus jedem Summanden herausnimmt und als Faktor vor eine Klammer setzt.

$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$

Als Sonderfall des Distributivgesetzes kann man noch die Regel auffassen, die beim Auflösen einer Klammer angewendet wird, wenn vor der Klammer ein Minuszeichen steht:

$$-(a + b) = -a - b$$

$$-(a - b) = -a + b$$

Viele Menschen können sich diese Regel besser in Worten merken:

Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer,

dann werden beim Auflösen der Klammer alle Vorzeichen umgekehrt.

Beispiele:

$$3 \cdot (2x + 3y) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3y = 6x + 9y$$

$$x \cdot (5a - 2b) = x \cdot 5a + x \cdot (-2b) = 5ax - 2bx$$

$$15u - 20v = 5 \cdot 3u + 5 \cdot (-4v) = 5 \cdot (3u - 4v)$$

$$-(5a - 4b + 3c) = -5a + 4b - 3c$$

$$(2x - 3) - (4x + 5) = 2x - 3 + (-4x - 5) = 2x - 3 - 4x - 5 = -2x - 8$$

$$x - 3 \cdot (-2x - 4) = x - 3 \cdot (-2x) - 3 \cdot (-4) = x + 6x + 12 = 7x + 12$$

3.4 Gemischte Beispiele zur Anwendung der Gesetze

$$-(x-y) = -x+y$$

$$-(-a-b) = a+b$$

$$-(a+b) = -a-b$$

$$\begin{aligned} 2a-(a-2b) &= 2a+(-a+2b) \\ &= 2a-a+2b \\ &= a+2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a+(2a-4b) &= 3a+2a-4b \\ &= 5a-4b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2a+3b)-(a-2b) &= 2a+3b+(-a+2b) \\ &= 2a+3b-a+2b \\ &= 2a-a+3b+2b \\ &= a+5b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\cdot(3a-2b) &= 5\cdot 3a+5\cdot(-2b) \\ &= 15a-10b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-7x+3y)\cdot(-2x) &= -7x\cdot(-2x)+3y\cdot(-2x) \\ &= 14x^2-6xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3b\cdot(-5a-4c) &= 3b\cdot(-5a)-3b\cdot(-4c) \\ &= 15ab+12bc \end{aligned}$$

$$-(2a-3b+5c-8d) = -2a+3b-5c+8d$$

$$\begin{aligned} -(5x-2y-z)\cdot(-7) &= (-5x+2y+z)\cdot(-7) \\ &= -5x\cdot(-7)+2y\cdot(-7)+z\cdot(-7) \\ &= 35x-14y-7z \end{aligned}$$

3.5 Produktformel

Aus dem Distributivgesetz ergibt sich auch eine Formel, mit deren Hilfe man das Produkt zweier Summen bestimmen kann. Ich möchte das an dieser Stelle kurz darstellen.

Umgewandelt werden soll ein Produktterm in dieser Form:

$$(a+b)\cdot(c+d)=\ldots$$

Dazu ersetze ich zunächst den Klammerterm $(c+d)$ durch C. Dann kann ich unter Anwendung des Distributivgesetzes folgende Umformung vornehmen:

$$\begin{array}{rcll}
(a+b)\cdot(c+d) & = & \ldots & \mid (c+d) \text{ durch } C \text{ ersetzen} \\
(a+b)\cdot(c+d) & = & (a+b)\cdot C & \mid \text{Distributivgesetz anwenden} \\
(a+b)\cdot(c+d) & = & a\cdot C+b\cdot C & \mid C \text{ wieder durch } (c+d) \text{ ersetzen} \\
(a+b)\cdot(c+d) & = & a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d) & \mid \text{zwei mal Distributivgesetz anwenden} \\
(a+b)\cdot(c+d) & = & a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d &
\end{array}$$

Damit haben wir diese sogenannte *Produktformel* hergeleitet:

$$\boxed{(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd}$$

Diese Formel kann entsprechend auch erweitert werden auf Faktoten mit mehr als zwei Summanden. Hier einige Beispiele dazu:

$$(a+b+c)\cdot(d+e)=ad+bd+cd+ae+be+ce$$
$$(a+b+c)\cdot(d+e+f)=ad+bd+cd+ae+be+ce+af+bf+cf$$
$$(a+b+c+d)\cdot(e+f)=ae+be+ce+de+af+bf+cf+df$$

Verallgemeinert lässt sich das besser in Worten ausdrücken:

Jedes Glied der ersten Summe wird mit jedem Glied der zweiten Summe multipliziert.

3.6 Beispiele zur Produktformel

$$
\begin{aligned}
(2x-7)\cdot(3x+2) &= 2x\cdot 3x + 2x\cdot 2 - 7\cdot 3x - 7\cdot 2\\
&= 6x^2 + 4x - 21x - 14\\
&= 6x^2 - 17x - 14
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2a+3b-c)\cdot(a-2b+3c) &= 2a\cdot a + 2a\cdot(-2b) + 2a\cdot 3c + 3b\cdot a\\
&\qquad +3b\cdot(-2b) + 3b\cdot 3c - c\cdot a - c\cdot(-2b) - c\cdot c\\
&= 2a^2 - 4ab + 6ac + 3ab - 6b^2 + 9bc - ac + 2bc - 3c^2\\
&= 2a^2 - 6b^2 - 3c^2 - ab + 5ac + 11bc
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2x+3y)\cdot(3x-4y)\cdot(-5x+2y) &= \Big(2x\cdot 3x + 2x\cdot(-4y) + 3y\cdot 3x + 3y\cdot(-4y)\Big)\cdot(-5x+2y)\\
&= (6x^2 - 8xy + 9xy - 12y^2)\cdot(-5x+2y)\\
&= (6x^2 + xy - 12y^2)\cdot(-5x+2y)\\
&= 6x^2\cdot(-5x) + 6x^2\cdot 2y + xy\cdot(-5x) + xy\cdot 2y\\
&\qquad -12y^2\cdot(-5x) - 12y^2\cdot 2y\\
&= -30x^3 + 12x^2y - 5x^2y + 2xy^2 + 60xy^2 - 24y^3\\
&= -30x^3 + 7x^2y + 62xy^2 - 24y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(x-1)\cdot(-2x+3) &= (-x+1)\cdot(-2x+3)\\
&= -x\cdot(-2x) - x\cdot 3 + 1\cdot(-2x) + 1\cdot 3\\
&= 2x^2 - 3x - 2x + 3\\
&= 2x^2 - 5x + 3
\end{aligned}
$$

3.7 Häufig gemachte Fehler

Leider hat es sich als notwendig erwiesen, auch Fehler vorzustellen, damit diese bewusst vermieden werden können.[1]

[1] Alle diese Fehler sind authentische Schülerfehler, sind in meinem Skript also eigentlich Plagiate, weil ich aus Datenschutzgründen die Quellen nicht nennen darf.

3.7.1 Mischung Zahlen mit Buchstaben

Hier passierte beispielsweise folgendes:

falsch	**richtig**
$3a \cdot 5a \neq 15a$	$3a \cdot 5a = 15a^2$
$x \cdot 5x \cdot 2x \neq 10x$	$x \cdot 5x \cdot 2x = 10x^3$
$b + (2a - 5b) \neq 2ab - 5b^2$	$b + (2a - 5b) = 2a - 4b$
$5a \cdot a \neq 6a$	$5a \cdot a = 5a^2$
$3a + 5b \neq 8ab$	(kann nicht zusammengefasst werden)

Hier scheint es einige Schüler zu verwirren, wenn manchmal der Punkt für die Multiplikation gesetzt und manchmal weggelassen wurde. Auch werden manchmal die Rechenarten miteinander verwechselt.

3.7.2 Verwechselung der Gesetze

Die Anwendung von Distributivgesetz und Assoziativgesetz wird gern durcheinandergebracht. Beispielsweise sieht man manchmal folgendes:

falsch	**richtig**
$3 \cdot (a \cdot b) \neq 3 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 9ab$	$3 \cdot (a \cdot b) = 3 \cdot a \cdot b = 3ab$
$5 \cdot 2a \cdot 3b \neq 10a \cdot 15b = 150ab$	$5 \cdot 2a \cdot 3b = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 30ab$
$a \cdot b \cdot c \neq ab \cdot ac$	$a \cdot b \cdot c = abc$
$(a - b) \cdot 2 \cdot (2a + 3b) \neq (2a - 2b) \cdot (4a + 6b)$	$(a - b) \cdot 2 \cdot (2a + 3b) = (2a - 2b) \cdot (2a + 3b)$
$4a \cdot 6b \neq 10ab$	$4a \cdot 6b = 24ab$

4 Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

$$(2a - 3b + c) \cdot (-1) = \dots$$

4.2 Aufgabe 2

$$-3(-a + 2x) = \dots$$

4.3 Aufgabe 3

$$2 \cdot (2a - 2b) - 3 \cdot (b - 2a) = \dots$$

4.4 Aufgabe 4

$$5(3x - y - 2z) - 4(-x + 2y - 3z) = \dots$$

4.5 Aufgabe 5

$$-10(-3m + 4n - 6) - 3(2m - 5n + 4) = \dots$$

4.6 Aufgabe 6

$$5a \cdot (3 - 2x) + 2x \cdot (5a - 4) = \dots$$

4.7 Aufgabe 7

$$-(-2i + 3j - 15)(-4) - (6j - 5)(-2) = \dots$$

4.8 Aufgabe 8

$$(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = \dots$$

4.9 Aufgabe 9

$$(-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = \dots$$

4.10 Aufgabe 10

$$(2x + 3) \cdot (3x - 2) = \dots$$

4.11 Aufgabe 11

$$(4x - 5) \cdot (-2x - 6) = \dots$$

4.12 Aufgabe 12

$$(-3x-7)(2x-4) = \dots$$

4.13 Aufgabe 13

$$(-3x-7)+(2x-4) = \dots$$

4.14 Aufgabe 14

$$7-(2x-4) = \dots$$

4.15 Aufgabe 15

$$10x-4(x-1)-4 = \dots$$

4.16 Aufgabe 16

$$(a+9)\cdot(4-b) = \dots$$

4.17 Aufgabe 17

$$-(3-2x)\cdot(x-5) = \dots$$

4.18 Aufgabe 18

$$(2x-3)\cdot(-3x-1)-(3x-2)\cdot(-2x-5) = \dots$$

4.19 Aufgabe 19

$$(a+2b-3c)\cdot(2m-3n) = \dots$$

4.20 Aufgabe 20

$$a+(2b-3c)\cdot(2m-3n) = \dots$$

4.21 Aufgabe 21

$$(4i+5j)\cdot(-4i+5j) = \dots$$

4.22 Aufgabe 22

$$3-(z-5)\cdot(4+z) = \dots$$

4.23 Aufgabe 23

$$(-2u - 3v + 5w) \cdot (a - 3b - 2c) = \ldots$$

4.24 Aufgabe 24

$$(-2u - 3v) + 5w \cdot a - (3b - 2c) = \ldots$$

4.25 Aufgabe 25

$$-2(u - 3v + 5w) \cdot (a - 3b) - 2c = \ldots$$

4.26 Aufgabe 26

$$-(2r - 3s + t) \cdot (-4r + 2s - 6t) = \ldots$$

4.27 Aufgabe 27

$$-5(-2u + 5w) \cdot (5r - 4s - 4t) = \ldots$$

4.28 Aufgabe 28

$$(2a - 3b) \cdot (5c - d) \cdot (-e + 2f) = \ldots$$

4.29 Aufgabe 29

$$(2a - 3b) \cdot 5c - d \cdot (-e + 2f) = \ldots$$

4.30 Aufgabe 30

$$3x \cdot (4a \cdot 5b) = \ldots$$

4.31 Aufgabe 31

$$2 \cdot (x - 5) = \ldots$$

4.32 Aufgabe 32

$$(5p - 2q) \cdot (-3r) = \ldots$$

4.33 Aufgabe 33

$$-2b(5a - c) = \ldots$$

4.34 Aufgabe 34

$$(x + 2y) \cdot (2x - 4y) = \dots$$

4.35 Aufgabe 35

$$4 - [2x - (3x - 5)] = \dots$$

4.36 Aufgabe 36

$$a - [2a - 2b - \langle 3b - (-2a + 5b)\rangle] = \dots$$

4.37 Aufgabe 37

$$(1 - a) \cdot (a + b - 2) = \dots$$

4.38 Aufgabe 38

$$(2u - 3v) \cdot (-x - 2y + 5z) = \dots$$

4.39 Aufgabe 39

$$(x + 1)(x + 2)(x - 3) = \dots$$

4.40 Aufgabe 40

$$(a - b)(-2a - b)(-a - 2b) = \dots$$

4.41 Aufgabe 41

$$(2x - 5) \cdot (4x - 3) = \dots$$

4.42 Aufgabe 42

$$2x - 5 \cdot (4x - 3) = \dots$$

4.43 Aufgabe 43

$$(2x - 5) \cdot 4x - 3 = \dots$$

4.44 Aufgabe 44

$$2x - 5 \cdot 4x - 3 = \dots$$

4.45 Aufgabe 45

$$2x - (5 \cdot 4x - 3) = \dots$$

4.46 Aufgabe 46

$$(3x + 5) \cdot (-4x + 2) - (5x - 1) = \dots$$

4.47 Aufgabe 47

$$(3x + 5) - (-4x + 2) \cdot (5x - 1) = \dots$$

4.48 Aufgabe 48

$$(3x + 5) - (-4x + 2) - 3(5x - 1) = \dots$$

4.49 Aufgabe 49

$$\Big((3x + 5) - (-4x + 2) - 3\Big) \cdot (5x - 1) = \dots$$

4.50 Aufgabe 50

$$\Big(-(3x + 5) \cdot (-4x + 2)\Big) - 3 \cdot (5x - 1) = \dots$$

4.51 Aufgabe 51

$$3 \cdot (x + 2) \cdot 5 \cdot (x - 2) \cdot 4 = \dots$$

5 Lösungen der Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1

$$\begin{aligned}(2a-3b+c)\cdot(-1) &= 2a\cdot(-1)-3b\cdot(-1)+c\cdot(-1)\\ &= -2a+3b-c\end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned}-3(-a+2x) &= -3\cdot(-a)-3\cdot 2x\\ &= 3a-6x\end{aligned}$$

5.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned}2\cdot(2a-2b)-3\cdot(b-2a) &= 2\cdot 2a+2\cdot(-2b)-3\cdot b-3\cdot(-2a)\\ &= 4a-4b-3b+6a\\ &= 4a+6a-4b-3b\\ &= 10a-7b\end{aligned}$$

5.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}5(3x-y-2z)-4(-x+2y-3z) &= 5\cdot 3x+5\cdot(-y)+5\cdot(-2z)-4\cdot(-x)-4\cdot 2y-4\cdot(-3z)\\ &= 15x-5y-10z+4x-8y+12z\\ &= 15x+4x-5y-8y-10z+12z\\ &= 19x-13y+2z\end{aligned}$$

5.5 Aufgabe 5

$$\begin{aligned}-10(-3m+4n-6)-3(2m-5n+4) &= -10\cdot(-3m)-10\cdot 4n-10\cdot(-6)-3\cdot 2m-3\cdot(-5n)-3\cdot 4\\ &= 30m-40n+60-6m+15n-12\\ &= 30m-6m-40n+15n+60-12\\ &= 24m-25n+48\end{aligned}$$

5.6 Aufgabe 6

$$\begin{aligned}5a\cdot(3-2x)+2x\cdot(5a-4) &= 5a\cdot 3+5a\cdot(-2x)+2x\cdot 5a+2x\cdot(-4)\\ &= 15a-10ax+10xa-8x\\ &= 15a-10ax+10ax-8x\\ &= 15a-8x\end{aligned}$$

5.7 Aufgabe 7

$$\begin{aligned}
-(-2i+3j-15)(-4)-(6j-5)(-2) &= (+2i-3j+15)(-4)+(-6j+5)(-2) \\
&= 2i\cdot(-4)-3j\cdot(-4)+15\cdot(-4)-6j\cdot(-2)+5\cdot(-2) \\
&= -8i+12j-60+12j-10 \\
&= -8i+12j+12j-60-10 \\
&= -8i+24j-70
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}
-(-2i+3j-15)(-4)-(6j-5)(-2) &= -\Big((-2i+3j-15)(-4)\Big)-\Big((6j-5)(-2)\Big) \\
&= -\Big(-2i\cdot(-4)+3j\cdot(-4)-15\cdot(-4)\Big)-\Big(6j\cdot(-2)-5\cdot(-2)\Big) \\
&= -(8i-12j+60)-(-12j+10) \\
&= -8i+12j-60+12j-10 \\
&= -8i+12j+12j-60-10 \\
&= -8i+24j-70
\end{aligned}$$

5.8 Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5) &= \Big((-1)\cdot(-2)\Big)\cdot\Big((-3)\cdot(-4)\Big)\cdot(-5) \\
&= (2\cdot 12)\cdot(-5) \\
&= 24\cdot(-5) \\
&= -120
\end{aligned}$$

5.9 Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5) &= \Big((-1)\cdot 2\Big)\cdot\Big((-3)\cdot(-4)\Big)\cdot(-5) \\
&= (-2\cdot 12)\cdot(-5) \\
&= -24\cdot(-5) \\
&= 120
\end{aligned}$$

5.10 Aufgabe 10

$$\begin{aligned}
(2x+3)\cdot(3x-2) &= 2x\cdot 3x+2x\cdot(-2)+3\cdot 3x+3\cdot(-2) \\
&= 6x^2-4x+9x-6 \\
&= 6x^2+5x-6
\end{aligned}$$

5.11 Aufgabe 11

$$\begin{aligned}
(4x-5)\cdot(-2x-6) &= 4x\cdot(-2x)+4x\cdot(-6)-5\cdot(-2x)-5\cdot(-6) \\
&= -8x^2-24x+10x+30 \\
&= -8x^2-14x+30
\end{aligned}$$

5.12 Aufgabe 12

$$
\begin{aligned}
(-3x-7)(2x-4) &= -3x\cdot 2x - 3x\cdot(-4) - 7\cdot 2x - 7\cdot(-4)\\
&= -6x^2 + 12x - 14x + 28\\
&= -6x^2 - 2x + 28
\end{aligned}
$$

5.13 Aufgabe 13

$$
\begin{aligned}
(-3x-7)+(2x-4) &= -3x - 7 + 2x - 4\\
&= -3x + 2x - 7 - 4\\
&= -x - 11
\end{aligned}
$$

5.14 Aufgabe 14

$$
\begin{aligned}
7-(2x-4) &= 7 + (-2x+4)\\
&= 7 - 2x + 4\\
&= 7 + 4 - 2x\\
&= 11 - 2x
\end{aligned}
$$

5.15 Aufgabe 15

$$
\begin{aligned}
10x - 4(x-1) - 4 &= 10x - 4\cdot x - 4\cdot(-1) - 4\\
&= 10x - 4x + 4 - 4\\
&= 6x
\end{aligned}
$$

5.16 Aufgabe 16

$$
\begin{aligned}
(a+9)\cdot(4-b) &= a\cdot 4 + a\cdot(-b) + 9\cdot 4 + 9\cdot(-b)\\
&= 4a - ab + 36 - 9b
\end{aligned}
$$

5.17 Aufgabe 17

$$
\begin{aligned}
-(3-2x)\cdot(x-5) &= +(-3+2x)\cdot(x-5)\\
&= -3\cdot x - 3\cdot(-5) + 2x\cdot x + 2x\cdot(-5)\\
&= -3x + 15 + 2x^2 - 10x\\
&= -3x - 10x + 15 + 2x^2\\
&= -13x + 15 + 2x^2
\end{aligned}
$$

Alternative Lösung:

$$
\begin{aligned}
-(3-2x)\cdot(x-5) &= -\Big(3\cdot x + 3\cdot(-5) - 2x\cdot x - 2x\cdot(-5)\Big)\\
&= -(3x - 15 - 2x^2 + 10x)\\
&= -3x + 15 + 2x^2 - 10x\\
&= -3x - 10x + 15 + 2x^2\\
&= -13x + 15 + 2x^2
\end{aligned}
$$

5.18 Aufgabe 18

$$\begin{aligned}(2x-3)\cdot(-3x-1)-(3x-2)\cdot(-2x-5) &= (2x-3)\cdot(-3x-1)+(-3x+2)\cdot(-2x-5)\\ &= 2x\cdot(-3x)+2x\cdot(-1)-3\cdot(-3x)-3\cdot(-1)\\ &\quad -3x\cdot(-2x)-3x\cdot(-5)+2\cdot(-2x)+2\cdot(-5)\\ &= -6x^2-2x+9x+3+6x^2+15x-4x-10\\ &= -6x^2+6x^2-2x+9x+15x-4x+3-10\\ &= 18x-7\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}(2x-3)\cdot(-3x-1)-(3x-2)\cdot(-2x-5) &= (2x-3)\cdot(-3x-1)-\Big((3x-2)\cdot(-2x-5)\Big)\\ &= 2x\cdot(-3x)+2x\cdot(-1)-3\cdot(-3x)-3\cdot(-1)\\ &\quad -\Big(3x\cdot(-2x)+3x\cdot(-5)-2\cdot(-2x)-2\cdot(-5)\Big)\\ &= -6x^2-2x+9x+3-(-6x^2-15x+4x+10)\\ &= -6x^2-2x+9x+3+6x^2+15x-4x-10\\ &= -6x^2+6x^2-2x+9x+15x-4x+3-10\\ &= 18x-7\end{aligned}$$

5.19 Aufgabe 19

$$\begin{aligned}(a+2b-3c)\cdot(2m-3n) &= a\cdot 2m+a\cdot(-3n)+2b\cdot 2m+2b\cdot(-3n)-3c\cdot 2n-3c\cdot(-3n)\\ &= 2am-3an+4bm-6bn-6cm+9cn\end{aligned}$$

5.20 Aufgabe 20

$$\begin{aligned}a+(2b-3c)\cdot(2m-3n) &= a+2b\cdot 2m+2b\cdot(-3n)-3c\cdot 2m-3c\cdot(-3n)\\ &= a+4bm-6bn-6mc+9cn\end{aligned}$$

5.21 Aufgabe 21

$$\begin{aligned}(4i+5j)\cdot(-4i+5j) &= 4i\cdot(-4i)+4i\cdot 5j+5j\cdot(-4i)+5j\cdot 5j\\ &= -16i^2+20ij-20ij+25j^2\\ &= -16i^2+25j^2\end{aligned}$$

5.22 Aufgabe 22

$$\begin{aligned}3-(z-5)\cdot(4+z) &= 3+(-z+5)\cdot(4+z)\\ &= 3-z\cdot 4-z\cdot z+5\cdot 4+5\cdot z\\ &= 3-4z-z^2+20+5z\\ &= 3+20-4z+5z-z^2\\ &= 23+z-z^2\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}
3-(z-5)\cdot(4+z) &= 3-\Big((z-5)\cdot(4+z)\Big)\\
&= 3-(z\cdot 4+z\cdot z-5\cdot 4-5\cdot z)\\
&= 3-(4z+z^2-20-5z)\\
&= 3-4z-z^2+20+5z\\
&= 3+20-4z+5z-z^2\\
&= 23+z-z^2
\end{aligned}$$

5.23 Aufgabe 23

$$\begin{aligned}
(-2u-3v+5w)\cdot(a-3b-2c) &= -2u\cdot a-2u\cdot(-3b)-2u\cdot(-2c)-3v\cdot a-3v\cdot(-3b)\\
&\quad -3v\cdot(-2c)+5w\cdot a+5w\cdot(-3b)+5w\cdot(-2c)\\
&= -2au+6bu+4cu-3av+9bv+6cv+5aw-15bw-10cw
\end{aligned}$$

5.24 Aufgabe 24

$$(-2u-3v)+5w\cdot a-(3b-2c) = -2u-3v+5aw-3b+2c$$

5.25 Aufgabe 25

$$\begin{aligned}
-2(u-3v+5w)\cdot(a-3b)-2c &= \Big(-2(u-3v+5w)\Big)\cdot(a-3b)-2c\\
&= \Big(-2\cdot u-2\cdot(-3v)-2\cdot 5w\Big)\cdot(a-3b)-2c\\
&= (-2u+6v-10w)\cdot(a-3b)-2c\\
&= -2u\cdot a-2u\cdot(-3b)+6v\cdot a+6v\cdot(-3b)-10w\cdot a-10w\cdot(-3b)-2c\\
&= -2au+6bu+6av-18bv-10aw+30bw-2c
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}
-2(u-3v+5w)\cdot(a-3b)-2c &= -2\Big((u-3v+5w)\cdot(a-3b)\Big)-2c\\
&= -2\Big(u\cdot a+u\cdot(-3b)-3v\cdot a-3v\cdot(-3b)+5w\cdot a+5w\cdot(-3b)\Big)-2c\\
&= -2\cdot(au-3bu-3av+9bv+5aw-15bw)-2c\\
&= -2\cdot au-2\cdot(-3bu)-2\cdot(-3av)-2\cdot 9bv-2\cdot 5aw-2\cdot(-15bw)-2c\\
&= -2au+6bu+6av-18bv-10aw+30bw-2c
\end{aligned}$$

5.26 Aufgabe 26

$$\begin{aligned}
-(2r-3s+t)\cdot(-4r+2s-6t) &= \Big(-(2r-3s+t)\Big)\cdot(-4r+2s-6t)\\
&= (-2r+3s-t)\cdot(-4r+2s-6t)\\
&= -2r\cdot(-4r)-2r\cdot 2s-2r\cdot(-6t)+3s\cdot(-4r)+3s\cdot 2s\\
&\quad +3s\cdot(-6t)-t\cdot(-4r)-t\cdot 2s-t\cdot(-6t)\\
&= 8r^2-4rs+12rt-12rs+6s^2-18st+4rt-2st+6t^2\\
&= 8r^2-4rs-12rs+12rt+4rt+6s^2-18st-2st+6t^2\\
&= 8r^2-16rs+16rt+6s^2-20st+6t^2
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}
-(2r-3s+t)\cdot(-4r+2s-6t) &= -\Big((2r-3s+t)\cdot(-4r+2s-6t)\Big)\\
&= -\Big(2r\cdot(-4r)+2r\cdot 2s+2r\cdot(-6t)-3s\cdot(-4r)-3s\cdot 2s\\
&\quad -3s\cdot(-6t)+t\cdot(-4r)+t\cdot 2s+t\cdot(-6t)\Big)\\
&= -\Big(-8r^2+4rs-12rt+12rs-6s^2+18st-4rt+2st-6t^2\Big)\\
&= -\Big(-8r^2+4rs+12rs-12rt-4rt-6s^2+18st+2st-6t^2\Big)\\
&= -\Big(-8r^2+16rs-16rt-6s^2+20st-6t^2\Big)\\
&= 8r^2-16rs+16rt+6s^2-20st+6t^2
\end{aligned}$$

5.27 Aufgabe 27

$$\begin{aligned}
-5(-2u+5w)\cdot(5r-4s-4t) &= \Big(-5(-2u+5w)\Big)\cdot(5r-4s-4t)\\
&= \Big(-5\cdot(-2u)-5\cdot 5w\Big)\cdot(5r-4s-4t)\\
&= (10u-25w)\cdot(5r-4s-4t)\\
&= 10u\cdot 5r+10u\cdot(-4s)+10u\cdot(-4t)\\
&\quad -25w\cdot 5r-25w\cdot(-4s)-25w\cdot(-4t)\\
&= 50ur-40us-40ut-125wr+100ws+100wt
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}
-5(-2u+5w)\cdot(5r-4s-4t) &= -5\Big((-2u+5w)\cdot(5r-4s-4t)\Big)\\
&= -5\Big(-2u\cdot 5r-2u\cdot(-4s)-2u\cdot(-4t)\\
&\quad +5w\cdot 5r+5w\cdot(-4s)+5w\cdot(-4t)\Big)\\
&= -5\Big(-10ur+8us+8ut+25wr-20ws-20wt\Big)\\
&= -5\cdot(-10ur)-5\cdot 8us-5\cdot 8ut\\
&\quad -5\cdot 25wr-5\cdot(-20ws)-5\cdot(-20wt)\\
&= 50ur-40us-40ut-125wr+100ws+100wt
\end{aligned}$$

5.28 Aufgabe 28

$$\begin{aligned}
(2a-3b)\cdot(5c-d)\cdot(-e+2f) &= \Big((2a-3b)\cdot(5c-d)\Big)\cdot(-e+2f)\\
&= \Big(2a\cdot 5c+2a\cdot(-d)-3b\cdot 5c-3b\cdot(-d)\Big)\cdot(-e+2f)\\
&= (10ac-2ad-15bc+3bd)\cdot(-e+2f)\\
&= 10ac\cdot(-e)+10ac\cdot 2f-2ad\cdot(-e)-2ad\cdot 2f\\
&\quad -15bc\cdot(-e)-15bc\cdot 2f+3bd\cdot(-e)+3bd\cdot 2f\\
&= -10ace+20acf+2ade-4adf\\
&\quad +15bce-30bcf-3bde+6bdf
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}
(2a-3b)\cdot(5c-d)\cdot(-e+2f) &= (2a-3b)\cdot\Big((5c-d)\cdot(-e+2f)\Big)\\
&= (2a-3b)\cdot\Big(5c\cdot(-e)+5c\cdot 2f-d\cdot(-e)-d\cdot 2f\Big)\\
&= (2a-3b)\cdot(-5ce+10cf+de-2df)\\
&= 2a\cdot(-5ce)+2a\cdot 10cf+2a\cdot de+2a\cdot(-2df)\\
&\quad -3b\cdot(-5ce)-3b\cdot 10cf-3b\cdot de-3b\cdot(-2df)\\
&= -10ace+20acf+2ade-4adf\\
&\quad +15bce-30bcf-3bde+6bdf
\end{aligned}$$

5.29 Aufgabe 29

$$\begin{aligned}
(2a-3b)\cdot 5c-d\cdot(-e+2f) &= 2a\cdot 5c-3b\cdot 5c-d\cdot(-e)-d\cdot 2f\\
&= 10ac-15bc+de-2df
\end{aligned}$$

5.30 Aufgabe 30

$$\begin{aligned}
3x\cdot(4a\cdot 5b) &= 3x\cdot 20ab\\
&= 60abx
\end{aligned}$$

Achtung! Nicht richtig ist folgender oft verwendeter Ansatz:

$$3x\cdot(4a\cdot 5b) \neq 3x\cdot 4a\cdot 3x\cdot 5b$$

Manch einer lässt sich gern von den Klammern verwirren. Aufgrund des Assoziativgesetzes darf man sie hier einfach weglassen, weil außer Multiplikation keine andere Rechenart vorkommt. In der Klammer steht eben kein + fürs Addieren sondern ein · fürs Multiplizieren!

5.31 Aufgabe 31

$$2\cdot(x-5) = 2x-10$$

5.32 Aufgabe 32

$$(5p-2q)\cdot(-3r) = -15pr+6qr$$

5.33 Aufgabe 33

$$-2b(5a-c) = -10ab+2bc$$

5.34 Aufgabe 34

$$\begin{aligned}(x+2y)\cdot(2x-4y) &= 2x^2-4xy+4xy-8y^2\\ &= 2x^2-8y^2\end{aligned}$$

5.35 Aufgabe 35

$$\begin{aligned}4-[2x-(3x-5)] &= 4-(2x-3x+5)\\ &= 4-2x+3x-5\\ &= x-1\end{aligned}$$

5.36 Aufgabe 36

$$\begin{aligned}a-[2a-2b-\langle 3b-(-2a+5b)\rangle] &= a-[2a-2b-\langle 3b+2a-5b\rangle]\\ &= a-[2a-2b-3b-2a+5b]\\ &= a-2a+2b+3b+2a-5b\\ &= a\end{aligned}$$

5.37 Aufgabe 37

$$\begin{aligned}(1-a)\cdot(a+b-2) &= a+b-2-a^2-ab+2a\\ &= 3a+b-2-a^2-ab\end{aligned}$$

5.38 Aufgabe 38

$$(2u-3v)\cdot(-x-2y+5z) = -2ux-4uy+10uz+3vx+6vy-15vz$$

5.39 Aufgabe 39

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x-3) &= \left(x^2+2x+x+2\right)(x-3)\\ &= \left(x^2+3x+2\right)(x-3)\\ &= x^3-3x^2+3x^2-9x+2x-6\\ &= x^3-7x-6\end{aligned}$$

5.40 Aufgabe 40

$$\begin{aligned}(a-b)(-2a-b)(-a-2b) &= \left(-2a^2-ab+2ab+b^2\right)(-a-2b)\\ &= \left(-2a^2+ab+b^2\right)(-a-2b)\\ &= 2a^3+4a^2b-a^2b-2ab^2-ab^2-2b^3\\ &= 2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3\end{aligned}$$

5.41 Aufgabe 41

$$\begin{aligned}(2x-5)\cdot(4x-3) &= 8x^2-6x-20x+15\\ &= 8x^2-26x+15\end{aligned}$$

5.42 Aufgabe 42

$$\begin{aligned}2x-5\cdot(4x-3) &= 2x-20x+15\\ &= -18x+15\end{aligned}$$

5.43 Aufgabe 43

$$(2x-5)\cdot 4x-3 = 8x^2-20x-3$$

5.44 Aufgabe 44

$$\begin{aligned}2x-5\cdot 4x-3 &= 2x-20x-3\\ &= -18x-3\end{aligned}$$

5.45 Aufgabe 45

$$\begin{aligned}2x-(5\cdot 4x-3) &= 2x-(20x-3)\\ &= 2x-20x+3\\ &= -18x+3\end{aligned}$$

5.46 Aufgabe 46

$$\begin{aligned}(3x+5)\cdot(-4x+2)-(5x-1) &= -12x^2+6x-20x+10-5x+1\\ &= -12x^2-19x+11\end{aligned}$$

5.47 Aufgabe 47

$$\begin{aligned}(3x+5)-(-4x+2)\cdot(5x-1) &= 3x+5-(-20x^2+4x+10x-2)\\ &= 3x+5+20x^2-4x-10x+2\\ &= 20x^2-11x+7\end{aligned}$$

5.48 Aufgabe 48

$$\begin{aligned}(3x+5)-(-4x+2)-3(5x-1) &= 3x+5+4x-2-15x+3\\ &= -8x+6\end{aligned}$$

5.49 Aufgabe 49

$$\begin{aligned}\Big((3x+5)-(-4x+2)-3\Big)\cdot(5x-1) &= \Big(3x+5+4x-2-3\Big)\cdot(5x-1)\\ &= 7x\cdot(5x-1)\\ &= 35x^2-7x\end{aligned}$$

5.50 Aufgabe 50

$$\begin{aligned}\Big(-(3x+5)\cdot(-4x+2)\Big)-3\cdot(5x-1) &= (-3x-5)\cdot(-4x+2)-3\cdot(5x-1)\\ &= (12x^2-6x+20x-10)-15x+3\\ &= 12x^2+14x-10-15x+3\\ &= 12x^2-x-7\end{aligned}$$

5.51 Aufgabe 51

$$\begin{aligned}3\cdot(x+2)\cdot5\cdot(x-2)\cdot4 &= 3\cdot5\cdot4\cdot(x+2)\cdot(x-2)\\ &= 60\cdot(x^2-4)\\ &= 60x^2-240\end{aligned}$$